UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A DESIGUALDADE DE MICHAEL E SIMON EM SUBVARIEDADES DO ESPAÇO EUCLIDIANO

MARIA RANILZE DA SILVA

Maceió
Maio de 2017

MARIA RANILZE DA SILVA

A DESIGUALDADE DE MICHAEL E SIMON EM SUBVARIEDADES DO ESPAÇO EUCLIDIANO

Dissertação de Mestrado na área de Geometria Diferencial, submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestra em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório

Maceió
2017

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586d Silva, Maria Ranilze da.
A desigualdade de Michael e Simon em subvariedades do espaço euclidiano / Maria Ranilze da Silva. - 2017.
41 f.

Orientador: Feliciano Marcílio Aguiar vitório.
Dissertação (mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 41

1 Matemática - Estudo e ensino. 2. Desigualdade de Sobolev. 3. Funções (Matemática) - Subharmônicas. 4. Subvariedades euclidianas. I. Título.

CDU: 514.76

A DESIGUALDADE DE MICHAEL E SIMON EM SUBVARIEDADES DO ESPAÇO EUCLIDIANO

MARIA RANILZE DA SILVA

Dissertação de Mestrado na área de Geometria Diferencial, submetida em 10 de maio de 2017 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestra em Matemática.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório - Orientador - UFAL

Carlos Gonçalves do Rei Filho

Prof. Dr. Carlos Gonçalves do Rei Filho - UFAL

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira - UFC

A Deus
e a meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por mais essa conquista!

Aos meus irmãos Ranilson, pela forte frase que me disse num momento que eu precisava muito, e Ranilton, por se orgulhar das minhas conquistas. Aos meus pais pelo apoio. Amo vocês!

Ao meu orientador, Prof. Feliciano Vitório, pela dedicação e paciência e, acima de tudo, por enxergar que eu poderia ir além e me dar a honra de trabalhar com ele.

A Karenn Melo por me ouvir sempre que precisava desabafar sobre as dificuldades do curso e pelas palavras de encorajamento. A Ana Maria e Ewerton Roosevelt, secretários da pós-graduação, pela atenção e conselhos dados durante o curso.

Ao Leon Lima que foi como um irmão, esteve presente em todos os momentos do curso, tanto bons como ruins, um amigo que o mestrado me deu e vou levar pra vida toda!

Aos professores, em especial ao Prof. Isnaldo, e aos colegas Myrla, Robson, Iury, entre outros, que se colocaram à disposição e tiveram paciência em tirar minhas dúvidas.

A todos os amigos da graduação, mestrado e doutorado que nos primeiros momentos do mestrado tiveram a preocupação em demonstrar que estavam felizes comigo, me fazendo acreditar que não estava sozinha; e aos que estiveram dando apoio até o último momento do curso.

Aos avaliadores, Prof. Jorge Lira e Prof. Carlos Gonçalves que separaram um pouco do seu tempo para dividir comigo esse momento tão importante e pelas sugestões dadas.

A CAPES pelo apoio financeiro durante todo o mestrado.

Às vezes as palavras não conseguem expressar quão grata sou a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste sonho, mas saibam que levarei para sempre essa gratidão em meu peito! Obrigada!

"Agrada-te do Senhor, e ele satisfará os desejos do teu coração".

(Salmos 37:4)

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma desigualdade geral de Sobolev. Estabelecida por Michael e Simon, essa desigualdade é obtida em subvariedades generalizadas do espaço euclidiano. Um caso especial desse resultado é a desigualdade clássica de Sobolev. Provaremos também uma desigualdade do valor médio para funções subharmônicas.

Palavras chave: Subvariedades; desigualdade de Sobolev; funções subharmônicas.

Abstract

In this work we will prove a general Sobolev inequality. Established for Michael and Simon, this inequality is obtained on the generalized manifolds of the euclidian space. A special case of the result is the ordinary Sobolev inequality. We proved too a mean-value inequality for subharmonic functions.

Keywords: Submanifolds; Sobolev inequality; subharmonic functions.

Sumário

Introdução

As desigualdades de Sobolev desempenham um papel muito importante na teoria das Equações Diferenciais Parciais. Sua forma clássica afirma que

"Dados $1 \leq p < n$ e p^* tais que $p^* = \dfrac{np}{n-p}$, existe uma constante $C = C_n(p)$ tal que

$$\left(\int |\varphi|^{p^*} d\sigma\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left(\int |\nabla\varphi|^p \, d\sigma\right)^{1/p}$$

para toda função $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto."

Em 1967, Miranda (em [6]) obteve uma desigualdade de Sobolev para gráficos mínimos.

No primeiro capítulo introduzimos alguns conceitos de geometria diferencial, mais especificamente de subvariedades do $\mathbb{R}^n$, que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

No segundo capítulo deste trabalho apresentaremos, no teorema 2.1.1, uma desigualdade geral de Sobolev estabelecida por Michael e Simon, essa desigualdade é obtida em subvariedades generalizadas do espaço euclidiano. Um caso especial desse resultado é a desigualdade clássica de Sobolev.

Inspirados nesse resultado, Hoffman e Spruck em [3] provaram uma desigualdade de Sobolev e uma desigualdade isoperimétrica para subvariedades M de uma variedade riemanniana $\overline{M}$ satisfazendo restrições geométricas envolvendo o volume de M e a curvatura seccional e o raio de injetividade de $\overline{M}$. Simon em [7] discute a aplicação da desigualdade geral de Sobolev (em subvariedades do espaço euclidiano) para o problema de estimativas do gradiente limitado para equações elípticas quase-lineares. Em [4], Medeiros prova uma desigualdade de Michael e Simon em variedades ponderadas, isto é, em variedades da forma $M_f = (M, g, dv_f)$, onde (M, g) é uma variedade riemanniana, $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave em M, e $dv_f = e^{-f}dv$ é a medida ponderada, onde dv denota a medida riemanniana em (M, g).

Concluímos o segundo capítulo com a discussão de uma desigualdade do valor médio para funções fracamente sub-harmônicas descrita no teorema 2.2.1.

1 Preliminares

Neste capítulo veremos alguns fatos da geometria diferencial, mais especificamente sobre subvariedades do $\mathbb{R}^n$, que são requisitos necessários para a compreensão do resultado principal.

1.1 Tensor Métrico e Gradiente Tangencial

Definição 1.1.1 *Seja $n \geq m \geq 1$. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade $m-$dimensional de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ se dado um ponto $x_0 \in M$ existem conjuntos abertos $D \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e uma aplicação C^2*

$$\begin{array}{rrcl} x: & D & \longrightarrow & \Omega \\ & t = (t_1, ..., t_m) & \longmapsto & x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \end{array}$$

tal que

$$x_0 \in \Omega \cap M = x(D),$$

e tal que os vetores $\dfrac{\partial x}{\partial t_i}(t), i = 1, ..., m,$ são linearmente independentes para cada $t \in D$. A aplicação x é chamada uma parametrização de M em x_0 e o espaço vetorial gerado por $\dfrac{\partial x}{\partial t_i}(t), i = 1, ..., m,$ onde $x(t_0) = x_0$, é chamado o espaço tangente $T_{x_0}M$ de M em x_0.

Definição 1.1.2 *Seja $n \geq m \geq 1$. Dada uma subvariedade $m-$dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^2, a primeira forma fundamental ou tensor métrico de M é a função de valores na matriz $(g_{ij})_{i,j=1,...,m}$ definida para $t \in D$ por*

$$g_{ij}(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x(t)}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k(t)}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x_k(t)}{\partial t_j}.$$

É fácil ver que dado $x_0 = x(t_0) \in M$ a relação

$$g(v,w) = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(t_0) v_i w_j, \tag{1.1}$$

onde $v = \sum_{i=1}^{m} v_i \dfrac{\partial x}{\partial t_i}(t_0)$ e $w = \sum_{j=1}^{m} w_j \dfrac{\partial x}{\partial t_j}(t_0)$ são dois vetores arbitrários de $T_{x_0}M$, define um produto interno. Além disso, g não depende da parametrização x. Usando um abuso de notação, também escreveremos $g = det(g_{ij})$, enquanto $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ denota a matriz inversa de (g_{ij}).

Graças a métrica g, podemos facilmente calcular a projeção ortogonal (com respeito ao produto interno usual) de um vetor em $\mathbb{R}^n$ no espaço tangente $T_{x_0}M$.

Proposição 1.1.1 *Seja $n \geq m \geq 1$. Dada uma subvariedade $m-$dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^2 e um ponto $x_0 = x(t_0) \in M$, a matriz $\widetilde{G}(x_0) = (\tilde{g}^{ij}(x_0))_{i,j=1,\ldots,n}$ definida por*

$$\tilde{g}^{ij}(x_0) = \sum_{r,s=1}^{m} g^{rs}(t_0) \frac{\partial x_i(t_0)}{\partial t_r} \cdot \frac{\partial x_j(t_0)}{\partial t_s}$$

representa a projeção ortogonal em $T_{x_0}M$ na base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\widetilde{G}(x_0).v = \begin{cases} v, & \forall v \in T_{x_0}M, \\ 0, & \forall v \in (T_{x_0}M)^{\perp}. \end{cases}$$

Em particular, $\forall x \in M$,

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{g}^{ii}(x) = m,$$

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}^{ij}(x) v_i v_j \leq |v|^2, \quad \forall v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{g}^{ij}(x) = \tilde{g}^{ji}(x), \quad \forall i,j = 1, \ldots, n.$$

Demonstração. Para todo $v \in T_{x_0}M$, temos que $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \dfrac{\partial x}{\partial t_i}$. Assim,

$$\widetilde{G}(x_0).v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial x}{\partial t_i}. \tag{1.2}$$

Fazendo o produto interno com $\dfrac{\partial x}{\partial t_s}$, obtemos

$$\left\langle \widetilde{G}(x_0)v, \frac{\partial x}{\partial t_s} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial x}{\partial t_i}, \frac{\partial x}{\partial t_s} \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} v_i \left\langle \frac{\partial x}{\partial t_i}, \frac{\partial x}{\partial t_s} \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} v_i g_{is}.$$

Multiplicando por g^{rs}, obtemos

$$g^{rs} \left\langle \widetilde{G}(x_0)v, \frac{\partial x}{\partial t_s} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i g_{is} g^{rs}.$$

Somando em s,

$$\sum_{s=1}^{m} g^{rs} \left\langle \widetilde{G}(x_0)v, \frac{\partial x}{\partial t_s} \right\rangle = \sum_{i,s=1}^{m} v_i g_{is} g^{rs} = \sum_{i=1}^{n} v_i \delta_{ir} = v_r.$$

Substituindo em (1.2), teremos

$$\begin{aligned} \widetilde{G}(x_0).v &= \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{m} g^{rs} \left\langle \widetilde{G}(x_0)v, \frac{\partial x}{\partial t_s} \right\rangle \right) \frac{\partial x}{\partial t_r} \\ &= \sum_{r,s=1}^{m} g^{rs} \left\langle v, \frac{\partial x}{\partial t_s} \right\rangle \frac{\partial x}{\partial t_r} \\ &= \sum_{r,s=1}^{m} g^{rs} \left\langle v, \frac{\partial x}{\partial t_s} \right\rangle \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial t_r} \cdot e_i. \end{aligned}$$

Assim, na base canônica do $\mathbb{R}^n$, temos

$$\widetilde{G}(x_0).e_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r,s=1}^{m} g^{rs} \left\langle e_j, \frac{\partial x}{\partial t_s} \right\rangle \frac{\partial x_i}{\partial t_r} \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r,s=1}^{m} g^{rs} \frac{\partial x_j}{\partial t_s} \frac{\partial x_i}{\partial t_r} \cdot e_i. \tag{1.3}$$

Portanto, na base canônica do $\mathbb{R}^n$, a matriz $\widetilde{G}(x_0)$ é representada por

$$\tilde{g}^{ij}(x_0) = \sum_{r,s=1}^{m} g^{rs}(t_0) \frac{\partial x_j(t_0)}{\partial t_s} \cdot \frac{\partial x_i(t_0)}{\partial t_r}.$$

Em particular, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}^{ii}(x) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{r,s=1}^{m} g^{rs}(t) \frac{\partial x_i(t)}{\partial t_s} \cdot \frac{\partial x_i(t)}{\partial t_r} = \sum_{r,s=1}^{m} g^{rs}(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i(t)}{\partial t_s} \cdot \frac{\partial x_i(t)}{\partial t_r} \\ &= \sum_{r,s=1}^{m} g^{rs}(t).g_{sr}(t) = \sum_{r,s=1}^{m} \delta_{rs} = \sum_{r=1}^{m} \delta_{rr} = m. \end{aligned}$$

Observe que $\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}^{ij}(x)v_iv_j$ é o produto interno de $\widetilde{G}(x_0).v$ com v, assim

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}^{ij}(x)v_iv_j = \langle \widetilde{G}(x_0).v, v\rangle \leq |\widetilde{G}(x_0).v||v| \leq |v||v| = |v|^2.$$

■

Agora, usando a matriz de projeção, podemos definir o gradiente tangencial como a projeção do gradiente sobre o espaço tangente.

Proposição 1.1.2 *Seja $n \geq m \geq 1$. Dados uma subvariedade $m-$dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^2, um ponto $x_0 = x(t_0) \in M$, um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $x_0 \in \Omega$, e uma função $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. O gradiente tangencial de φ em x_0 é definido como a projeção ortogonal de $\nabla\varphi$ em $T_{x_0}M$. E, temos*

$$\nabla_T\varphi(x_0) := \widetilde{G}(x_0).\nabla\varphi(x_0) = \sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{m} g^{rs}(t_0)\frac{\partial\varphi}{\partial t_s}(t_0)\right)\frac{\partial x}{\partial t_r}(t_0).$$

Demonstração. Sabemos que o gradiente pode ser escrito como $\nabla\varphi(x_0) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x_0)e_k$, onde $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Assim, por (1.3),

$$\begin{aligned}
\nabla_T\varphi(x_0) &= \widetilde{G}(x_0).\nabla\varphi(x_0) = \widetilde{G}(x_0)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x_0)e_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x_0).\widetilde{G}(x_0)e_k\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x_0)\sum_{i=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{m} g^{rs}\frac{\partial x_k}{\partial t_s}(t_0)\frac{\partial x_i}{\partial t_r}(t_0)\cdot e_i\\
&= \sum_{k,i=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{m} g^{rs}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x_0)\frac{\partial x_k}{\partial t_s}(t_0)\frac{\partial x_i}{\partial t_r}(t_0)\cdot e_i\\
&= \sum_{r,s=1}^{m} g^{rs}\frac{\partial\varphi}{\partial t_s}(t_0)\frac{\partial x}{\partial t_r}(t_0).
\end{aligned}$$

■

1.2 Área da superfície de uma subvariedade

Seja $x : D \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \Omega$ uma parametrização de uma subvariedade $m-$dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^2. Dado um subdomínio $\omega \subset\subset D$ suavemente limitado, a imagem de ω em M tem área m-dimensional igual a

$$\int_{x(\omega)} d\sigma = \int_{\omega} \sqrt{g}\, dt_1 ... dt_m.$$

Usando a partição da unidade, podemos usar a fórmula acima para calcular a integral sobre M de uma função que é contínua em uma vizinhança de M.

A seguinte propriedade elementar do elemento de área será útil na sequência.

Lema 1.2.1 *Seja $1 \leq m \leq n$. Seja M uma subvariedade $m-$dimensional de classe C^2 do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e denote por $d\sigma = \sqrt{g}\, dt_1 ... dt_m$ o elemento de volume. Seja ω_m a medida de Lebesgue da bola unitária em $\mathbb{R}^m$. Então, para todo $x_0 \in M$,*

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\sigma(S_\rho(x_0))}{\rho^m} = \omega_m$$

onde

$$S_\rho(x_0) = \{x \in M : |x - x_0| \leq \rho\}.$$

Demonstração. Seja x uma parametrização de M em $x_0 = x(t_0)$. Pela fórmula de Taylor,

$$x(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{m} (t - t_0)_i \frac{\partial x}{\partial t_i}(t_0) + o(|t - t_0|). \tag{1.4}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que a base canônica de $\mathbb{R}^m$ é ortonormal para o produto interno $g(t_0)$, isto é, existem $\lambda_1, ..., \lambda_m > 0$ tais que $g_{ij}(t_0) = \lambda_i \delta_{ij}$. Assim, usando (1.4), obtemos

$$\begin{aligned} |x - x_0|^2 &= \sum_{i,j=1}^{m} (t - t_0)_i \frac{\partial x}{\partial t_i}(t_0)(t - t_0)_j \frac{\partial x}{\partial t_j}(t_0) + o(|t - t_0|^2) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(t_0)(t - t_0)_i (t - t_0)_j + o(|t - t_0|^2) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (t - t_0)_i^2 + o(|t - t_0|^2). \end{aligned}$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, deduzimos que para ρ suficientemente pequeno, temos

$$\left\{ t \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (t-t_0)_i^2 \leq (1-\varepsilon)\rho^2 \right\} \subset x^{-1}(S_\rho(x_0)) \subset \left\{ t \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (t-t_0)_i^2 \leq (1+\varepsilon)\rho^2 \right\}.$$

Assim, usando a mudança de variáveis $s_i = \sqrt{\lambda_i}(t-t_0)_i, i = 1, ..., m$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\sigma(S_\rho(x_0))}{\rho^m} &= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\int_{S_\rho(x_0)} d\sigma}{\rho^m} \\
&= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\int_{\{t : \sum_{i=1}^m \lambda_i (t-t_0)_i^2 \leq \rho^2\}} \sqrt{g}\, dt_1 ... dt_m}{\rho^m} \\
&= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\int_{\{t : \sum_{i=1}^m \lambda_i (t-t_0)_i^2 \leq \rho^2\}} \sqrt{\lambda_1 ... \lambda_m}\, dt_1 ... dt_m}{\rho^m} \\
&= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\int_{\{s : \sum_{i=1}^m s_i^2 \leq \rho^2\}} ds_1 ... ds_m}{\rho^m} \\
&= \omega_m.
\end{aligned}$$

■

1.3 Curvatura

1.3.1 Vetor tangente e vetor curvatura de uma curva

Uma curva regular em uma subvariedade M é uma aplicação $x : I = (\alpha, \beta) \to M$ de classe C^1 tal que $|x^{'}(\tau)| > 0, \forall\, \tau \in I$. Denote por $t_1(\tau), ..., t_m(\tau)$ as coordenadas de $x(\tau)$ em alguma parametrização de M. Então,

$$|x^{'}(\tau)|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} t_i^{'}(\tau) t_j^{'}(\tau)$$

e o comprimento da curva $x(\tau)$ é dado por

$$L = \int_\alpha^\beta |x^{'}(\tau)|\, d\tau.$$

Agora, seja $s(\tau) = \int_\alpha^\tau |x'(\tau)|\, d\tau$. Então, sendo a curva $x(\tau)$ regular, a aplicação $s : (\alpha, \beta) \to (0, L)$ é invertível. s é chamado o parâmetro de comprimento de arco e a aplicação

$$\begin{cases} (0, L) & \to \mathbb{R}^n \\ s & \mapsto x(\tau(s)), \end{cases}$$

onde $\tau(s)$ é a aplicação inversa de $s(\tau)$, a parametrização da curva pelo comprimento de arco. O *vetor tangente unitário* da curva é dado por

$$T = \frac{dx}{ds} = \frac{x'(\tau)}{s'(\tau)}$$

e o *vetor curvatura*

$$K = \frac{dT}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}.$$

Note que $|T|^2 = 1 \Rightarrow T \cdot \frac{dT}{ds} = 0$, isto é, o vetor tangente unitário é ortogonal ao vetor curvatura.

1.3.2 Segunda forma fundamental, curvatura normal e curvatura média

Dados uma subvariedade M e um ponto $x_0 \in M$, o complemento ortogonal do espaço tangente $N_{x_0}(M) = (T_{x_0}(M))^\perp$ é chamado o *Espaço Normal* de M em x_0.

Dada uma curva regular $x(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco, os vetores tangente e curvatura podem ser escritos nas coordenadas de uma parametrização na forma:

$$\frac{dx}{ds} = \sum_{i=1}^m \frac{dt_i}{ds} \frac{\partial x}{\partial t_i}$$

e

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \sum_{i=1}^m \frac{d^2t_i}{ds^2} \frac{\partial x}{\partial t_i} + \sum_{i,j=1}^m \frac{dt_i}{ds} \frac{dt_j}{ds} \frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_j}.$$

Tomando um vetor normal $N \in N_{x_0}M$, obtemos

$$\frac{d^2x}{ds^2} \cdot N = \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_j} \cdot N \right) \frac{dt_i}{ds} \frac{dt_j}{ds},$$

que pode ser visto como uma forma quadrática agindo sobre o vetor $T = \frac{dx}{ds}$, essa forma quadrática é chamada a segunda forma fundamental de M com respeito ao vetor normal N e é representada na base $\left(\frac{\partial x}{\partial t_i}\right)$ de $T_{x_0}M$ pela matriz

$$B_{ij} = B_{ij}(N) = \frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_j} \cdot N.$$

Essa matriz também pode ser expressa como

$$B_{ij} = -\frac{\partial N}{\partial \tau_i} \cdot \tau_j,$$

onde $\tau_i = \frac{\partial x}{\partial t_i}$. De fato,

$$\frac{\partial N}{\partial \tau_i} \cdot \tau_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial N_k}{\partial \tau_i} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} (\nabla N_k \cdot \tau_i) \frac{\partial x_k}{\partial t_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial N_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t_i} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial N_k}{\partial t_i} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} = \frac{\partial N}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j},$$

enquanto

$$0 = \frac{\partial}{\partial t_i}(N \cdot \tau_j) = \frac{\partial N}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j} + N \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t_j \partial t_i} = \frac{\partial N}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j} + B_{ij},$$

pois $N.\tau_j = 0$, o que implica que

$$B_{ij} = -\frac{\partial N}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j} = -\frac{\partial N}{\partial \tau_i} \cdot \tau_j.$$

Sendo $T = dx/ds$, a segunda forma fundamental calculada em T, isto é,

$$k(N, T) = \frac{d^2 x}{ds^2} \cdot N$$

é chamada a *curvatura normal* de M na direção de T com respeito a N.

Tome uma base ortonormal de $T_{x_0}M$ e seja (B_{ij}) a matriz da segunda forma fundamental nesta base. Então, os autovalores $k_i = k_i(N), i = 1, ..., m$ de (B_{ij}) são *chamados as curvaturas principais* de M com respeito ao normal N. A média aritmética deles

$$H(N) = \frac{k_1(N) + \cdots + k_m(N)}{m}$$

é a *curvatura média de M com respeito a N*. Como $H(N)$ é linear em N, existe um único vetor $\mathbf{H} \in N_{x_0}M$ tal que

$$H(N) = \mathbf{H} \cdot N.$$

H é chamado *vetor curvatura média.*

Observação 1.3.1 *Não havendo problemas de confusão usaremos simplesmente $\nabla\varphi$ para representar o gradiente tangencial de φ.*

Proposição 1.3.1 *Seja $x : D \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \Omega$ uma parametrização de uma subvariedade $m-$dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^2. Então, o vetor curvatura média de M satisfaz*

$$H = \Delta_M x.$$

Demonstração. Vamos mostrar a igualdade nas coordenadas. Dado um campo $X \in \chi(M)$, temos que $Xx_i = X\langle x, e_i\rangle = \langle X, e_i\rangle = \langle X, e_i^T\rangle$, daí $\nabla x_i = e_i^T$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta_M x_i &= div_M \nabla x_i = div_M e_i^T \\
&= \sum_j \langle \nabla_{v_j} e_i^T, v_j\rangle = \sum_j \langle D_{v_j} e_i^T, v_j\rangle \\
&= \sum_j \langle D_{v_j}(e_i - e_i^\perp), v_j\rangle = -\sum_j \langle D_{v_j} e_i^\perp, v_j\rangle \\
&= -\sum_j (v_j\langle e_i^\perp, v_j\rangle - \langle e_i^\perp, D_{v_j} v_j\rangle) \\
&= \sum_j \langle e_i^\perp, D_{v_j} v_j\rangle = \sum_j \langle e_i^\perp, \nabla_{v_j} v_j + \alpha(v_j, v_j)\rangle \\
&= \sum_j \langle e_i^\perp, \alpha(v_j, v_j)\rangle = \langle e_i^\perp, H\rangle = \langle e_i, H\rangle = H_i
\end{aligned}$$

■

Como consequência imediata da proposição 1.3.1, obtemos o seguinte lema:

Lema 1.3.1 *Seja $1 \le m \le n$. Seja $x : D \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \Omega$ uma parametrização de uma subvariedade $m-$dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^2. Então, para toda $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, temos*

$$\int_M (\nabla\varphi + H\varphi)\, d\sigma = 0.$$

Demonstração. Pela Proposição anterior, temos $H_i = div_M e_i^T$. Multiplicando por φ e integrando, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M H_i \varphi \, d\sigma &= \int_M \varphi div_M e_i^T \, d\sigma = \int_M div_M(\varphi e_i^T) \, d\sigma - \int_M \langle \nabla\varphi, e_i^T \rangle \, d\sigma \\
&= \int_{\partial M} \langle \varphi e_i^T, \nu \rangle \, d\sigma - \int_M \langle \nabla\varphi, e_i^T \rangle \, d\sigma \\
&= -\int_M \langle \nabla\varphi, e_i^T \rangle \, d\sigma = -\int_M \langle \nabla\varphi, e_i \rangle \, d\sigma
\end{aligned}$$

■

2 Desigualdades de Michael e Simon

Nesta capítulo apresentaremos a desigualdade de Sobolev em subvariedades do $\mathbb{R}^n$ e uma desigualdade do valor médio para funções subharmônicas.

2.1 A desigualdade de Sobolev em subvariedades do $\mathbb{R}^n$

O Teorema a seguir é o resultado principal deste trabalho.

Teorema 2.1.1 *(**Michael e Simon**) Seja $1 \leq m \leq n$. Sejam $x : D \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \Omega$ uma parametrização de uma subvariedade $m-$dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^2 e U um conjunto aberto contido em M. Para todo $p \in [1, m)$, existe uma constante $C = C(m, p) > 0$ tal que para todo $\varphi \in C_c^1(U)$,*

$$\left(\int_M |\varphi|^{p^*} d\sigma\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left[\left(\int_M |\nabla\varphi|^p \, d\sigma\right)^{1/p} + \left(\int_M |H\varphi|^p d\sigma\right)^{1/p}\right], \tag{2.1}$$

onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{m}$, H é a curvatura média de M e $\nabla\varphi$ é o gradiente tangencial.

Para demonstrar esse teorema usaremos os lemas a seguir.

Lema 2.1.1 *Suponha que $\lambda \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função não-decrescente tal que $\lambda(t) = 0$ para $t \leq 0$. Seja $\varphi \in C_c^1(U), \varphi \geq 0$. Seja $x_0 \in M$, defina $\varphi_{x_0}, \psi_{x_0} \in C^1(0, +\infty)$ por*

$$\varphi_{x_0}(\rho) = \int_M \varphi(x)\lambda(\rho - r) \, d\sigma(x)$$

e

$$\psi_{x_0}(\rho) = \int_M [|\nabla_T\varphi(x)| + |H|\varphi(x)]\lambda(\rho - r) \, d\sigma(x),$$

onde $r = |x - x_0|$. *Então,*

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\varphi_{x_0(\rho)}}{\rho^m}\right) \leq \frac{\psi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}, \quad \textit{para todo } \rho > 0.$$

Demonstração. Observe que no lema 1.3.1, temos a igualdade em cada coordenada, assim tomando a função

$$\psi = (x - x_0)_i \lambda(\rho - r)\varphi,$$

temos

$$\int_M \delta_i[(x - x_0)_i \lambda(\rho - r)\varphi]\, d\sigma = -\int_M H_i (x - x_0)_i \lambda(\rho - r)\varphi\, d\sigma,$$

onde δ_i, H_i são as componentes de ∇, H na base canônica de $\mathbb{R}^n$. Somando em i, ficamos com

$$\int_M \sum_{i=1}^n \delta_i[(x - x_0)_i \lambda(\rho - r)\varphi]\, d\sigma = -\int_M \lambda(\rho - r)\varphi \sum_{i=1}^n H_i (x - x_0)_i\, d\sigma. \tag{2.2}$$

Agora, precisamos encontrar a i-ésima coordenada de $\nabla\psi$. Temos

$$\nabla\psi = \lambda(\rho - r)\varphi\nabla(x - x_0)_i + (x - x_0)_i \varphi\lambda^{'}(\rho - r)\nabla(\rho - r) + (x - x_0)_i \lambda(\rho - r)\nabla\varphi.$$

Pela proposição 1.1.2, temos

$$\begin{aligned}
\nabla(x - x_0)_i &= \sum_{r,s=1}^m g^{rs} \frac{\partial}{\partial t_s}(x - x_0)_i \frac{\partial x}{\partial t_r} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{r,s=1}^m g^{rs} \frac{\partial x_i}{\partial t_s}\frac{\partial x_i}{\partial t_r} e_i = \sum_{i=1}^n \tilde{g}^{ii} e_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(\rho - r) &= \sum_{i=1}^n \sum_{r,s=1}^m g^{rs} \frac{\partial}{\partial t_s}(\rho - |x - x_0|)\frac{\partial x_i}{\partial t_r} e_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{r,s=1}^m g^{rs} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho - |x - x_0|)\frac{\partial x_j}{\partial t_s}\frac{\partial x_i}{\partial t_r} e_i \\
&= \sum_{i,j=1}^n \sum_{r,s=1}^m g^{rs} \left(-\frac{(x - x_0)_j}{|x - x_0|}\right)\frac{\partial x_j}{\partial t_s}\frac{\partial x_i}{\partial t_r} e_i \\
&= -\sum_{i,j=1}^n \frac{(x - x_0)_j}{|x - x_0|}\tilde{g}^{ji} e_i = -\sum_{i,j=1}^n \frac{(x - x_0)_j}{r}\tilde{g}^{ji} e_i
\end{aligned}$$

e

$$\nabla\varphi = \sum_{i=1}^{n} \delta_i\varphi.e_i.$$

Assim, para cada i,

$$\delta_i\psi = \lambda(\rho - r)\varphi.\tilde{g}^{ii} - (x - x_0)_i\varphi\lambda'(\rho - r)\sum_{j=1}^{n}\frac{(x - x_0)_j}{r}\tilde{g}^{ji} + (x - x_0)_i\lambda(\rho - r)\delta_i\varphi$$

Somando em i e usando a proposição 1.1.1, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\delta_i\psi &= \lambda(\rho - r)\varphi.\sum_{i=1}^{n}\tilde{g}^{ii} - \varphi r\lambda'(\rho - r)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{(x - x_0)_i}{r}\frac{(x - x_0)_j}{r}\tilde{g}^{ji} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}(x - x_0)_i\lambda(\rho - r)\delta_i\varphi \\
&\geq m\lambda(\rho - r)\varphi - \varphi r\lambda'(\rho - r)\frac{|x - x_0|^2}{r^2} + \lambda(\rho - r)\sum_{i=1}^{n}(x - x_0)_i\delta_i\varphi \\
&= m\lambda(\rho - r)\varphi - \varphi r\lambda'(\rho - r) + \lambda(\rho - r)\sum_{i=1}^{n}(x - x_0)_i\delta_i\varphi
\end{aligned}$$

Substituindo na equação (2.2),

$$\begin{aligned}
-\int_M \lambda(\rho - r)\varphi\sum_{i=1}^{n}H_i(x - x_0)_i\,d\sigma &\geq m\int_M \lambda(\rho - r)\varphi\,d\sigma - \int_M r\varphi\lambda'(\rho - r)\,d\sigma + \\
&\quad + \int_M \lambda(\rho - r)\sum_{i=1}^{n}(x - x_0)_i\delta_i\varphi\,d\sigma,
\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
m\varphi_{x_0}(\rho) - \int_M r\varphi\lambda'(\rho - r)\,d\sigma &\leq -\int_M \lambda(\rho - r)\varphi\sum_{i=1}^{n}H_i(x - x_0)_i\,d\sigma - \\
&\quad - \int_M \lambda(\rho - r)\sum_{i=1}^{n}(x - x_0)_i\delta_i\varphi\,d\sigma \\
&= -\int_M \lambda(\rho - r)\varphi\langle H, x - x_0\rangle\,d\sigma - \\
&\quad - \int_M \lambda(\rho - r)\langle x - x_0, \nabla\varphi\rangle\,d\sigma \\
&\leq \int_M \lambda(\rho - r)\varphi|\langle H, x - x_0\rangle|\,d\sigma \\
&\quad + \int_M \lambda(\rho - r)|\langle x - x_0, \nabla\varphi\rangle|\,d\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\varphi_{x_0}(\rho) - \int_M r\varphi\lambda'(\rho - r)\, d\sigma &\leq \int_M \lambda(\rho - r)\varphi|H||x - x_0|\, d\sigma + \\ &+ \int_M \lambda(\rho - r)|x - x_0||\nabla\varphi|\, d\sigma \\ &= \int_M r\lambda(\rho - r)(|\nabla\varphi| + |H|\varphi)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Como $\lambda(\rho - r) \geq 0$ e $\lambda'(\rho - r) \geq 0$ (pois $\lambda(t)$ é não-decrescente), para $r \leq \rho$, temos que

$$r\lambda(\rho - r) \leq \rho\lambda(\rho - r) \quad \text{e} \quad r\lambda'(\rho - r) \leq \rho\lambda'(\rho - r). \tag{2.3}$$

Para $r \geq \rho$, temos $\lambda(\rho - r) = 0$, e as desigualdades (2.3) seguem trivialmente. Com isso, obtemos

$$m\varphi_{x_0}(\rho) - \int_M \rho\varphi\lambda'(\rho - r)\, d\sigma \leq \int_M \rho\lambda(\rho - r)(|\nabla\varphi| + |H|\varphi)\, d\sigma,$$

isto é,

$$m\varphi_{x_0}(\rho) - \rho\varphi'_{x_0}(\rho) \leq \rho\psi_{x_0}(\rho).$$

Logo,

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{m\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m} - \frac{\rho\varphi'_{x_0}(\rho)}{\rho^m}\right) \leq \frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho\psi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}\right) = \frac{\psi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}.$$

■

Lema 2.1.2 *Sejam φ como no Lema 2.1.1 e $x_0 \in M$ tal que $\varphi(x_0) \geq 1$. Defina $\overline{\varphi}_{x_0}, \overline{\psi}_{x_0}$ em $(0, +\infty)$ por*

$$\overline{\varphi}_{x_0}(\rho) = \int_{S_\rho(x_0)} \varphi(x)\, d\sigma(x)$$

e

$$\overline{\psi}_{x_0}(\rho) = \int_{S_\rho(x_0)} [|\nabla\varphi(x)| + |H|\varphi(x)]\, d\sigma(x),$$

onde $S_\rho(x_0) = \{x \in M : |x - x_0| \leq \rho\}$. Então, existe ρ tal que $0 < \rho < 2[\omega_m^{-1} \int_M \varphi\, d\sigma]^{\frac{1}{m}}$ e

$$\overline{\varphi}_{x_0}(4\rho) \leq 4^m \left[\omega_m^{-1} \int_M \varphi\, d\sigma\right]^{\frac{1}{m}} \overline{\psi}_{x_0}(\rho),$$

onde ω_m denota a medida de Lebesgue da bola unitária em $\mathbb{R}^m$.

Demonstração. Sejam $\varphi_{x_0}, \psi_{x_0}$ como no Lema 2.1.1, então

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\varphi_{x_0(\rho)}}{\rho^m}\right) \leq \frac{\psi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}. \tag{2.4}$$

Seja $\rho_0 = 2[\omega_m^{-1} \int_M \varphi \, d\sigma]^{\frac{1}{m}} > 0$. Assuma que $t \in (0, \rho_0)$. Integrando (2.4) no intervalo (t, ρ_0), obtemos

$$t^{-m}\varphi_{x_0}(t) - \rho_0^{-m}\varphi_{x_0}(\rho_0) \leq \int_t^{\rho_0} \rho^{-m}\psi_{x_0}(\rho)d\rho$$

Daí,

$$t^{-m}\varphi_{x_0}(t) \quad \leq \quad \rho_0^{-m}\varphi_{x_0}(\rho_0) + \int_0^{\rho_0} \rho^{-m}\psi_{x_0}(\rho)d\rho \tag{2.5}$$

Agora, seja $\varepsilon \in (0, t)$ e suponha que a função λ que aparece na definição de $\varphi_{x_0}, \psi_{x_0}$ é tal que $\lambda(t) = 1, \forall\, t \geq \varepsilon$. Então,

$$\begin{aligned}
\varphi_{x_0}(t) &= \int_M \varphi(x)\lambda(t-r)\, d\sigma = \int_{M\cap S_t(x_0)} \varphi(x)\lambda(t-r)\, d\sigma && (2.6)\\
&= \int_{M\cap S_{t-\varepsilon}(x_0)} \varphi(x)\lambda(t-r)\, d\sigma + \int_{M\cap(S_t(x_0)\backslash S_{t-\varepsilon}(x_0))} \varphi(x)\lambda(t-r)\, d\sigma && (2.7)\\
&= \int_{M\cap S_{t-\varepsilon}(x_0)} \varphi(x)\, d\sigma + \int_{M\cap(S_t(x_0)\backslash S_{t-\varepsilon}(x_0))} \varphi(x)\lambda(t-r)\, d\sigma && (2.8)\\
&\geq \int_{M\cap S_{t-\varepsilon}(x_0)} \varphi(x)\, d\sigma = \overline{\varphi}_{x_0}(t-\varepsilon), && (2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{x_0}(\rho_0) &= \int_{M\cap S_{\rho_0-\varepsilon}(x_0)} \varphi(x)\, d\sigma + \int_{M\cap(S_{\rho_0}(x_0)\backslash S_{\rho_0-\varepsilon}(x_0))} \varphi(x)\lambda(\rho_0-r)\, d\sigma && (2.10)\\
&\leq \int_{M\cap S_{\rho_0-\varepsilon}(x_0)} \varphi(x)\, d\sigma + \int_{M\cap(S_{\rho_0}(x_0)\backslash S_{\rho_0-\varepsilon}(x_0))} \varphi(x)\, d\sigma && (2.11)\\
&= \int_{M\cap S_{\rho_0}(x_0)} \varphi(x)\, d\sigma = \overline{\varphi}_{x_0}(\rho_0) && (2.12)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\psi_{x_0}(\rho) &= \int_M [|\nabla\varphi(x)| + |H|\varphi(x)]\lambda(\rho-r)\, d\sigma\\
&= \int_{M\cap S_\rho(x_0)} [|\nabla\varphi(x)| + |H|\varphi(x)]\lambda(\rho-r)\, d\sigma\\
&= \int_{M\cap S_{\rho-\varepsilon}(x_0)} [|\nabla\varphi(x)| + |H|\varphi(x)]\, d\sigma\\
&\quad + \int_{M\cap(S_\rho(x_0)\backslash S_{\rho-\varepsilon}(x_0))} [|\nabla\varphi(x)| + |H|\varphi(x)]\lambda(\rho-r)\, d\sigma\\
&\leq \int_{M\cap S_{\rho-\varepsilon}(x_0)} [|\nabla\varphi(x)| + |H|\varphi(x)]\, d\sigma + \int_{M\cap(S_\rho(x_0)\backslash S_{\rho-\varepsilon}(x_0))} [|\nabla\varphi(x)| + |H|\varphi(x)]\, d\sigma
\end{aligned}$$

$$\psi_{x_0}(\rho) \ \leq \ \int_{M\cap S_\rho(x_0)} [|\nabla\varphi(x)| + |H|\varphi(x)]\, d\sigma = \overline{\psi}_{x_0}(\rho).$$

Substituindo essas estimativas em (2.5), obtemos

$$t^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(t-\varepsilon) \leq \rho_0^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(\rho_0) + \int_0^{\rho_0} \rho^{-m}\overline{\psi}_{x_0}(\rho)d\rho.$$

Como $t < \rho_0$ e $\varepsilon \in (0,t)$ são arbitrários, segue que

$$\sup_{t\in(0,\rho_0)} t^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(t) \leq \rho_0^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(\rho_0) + \int_0^{\rho_0} \rho^{-m}\overline{\psi}_{x_0}(\rho)d\rho. \tag{2.13}$$

Suponha, ao contrário do estabelecido no lema, que $\overline{\psi}_{x_0}(\rho) < 2.4^{-m}\rho_0^{-1}\overline{\varphi}_{x_0}(4\rho), \forall\, \rho \in (0,\rho_0)$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\rho_0} \rho^{-m}\overline{\psi}_{x_0}(\rho)d\rho \ &\leq \ 2.4^{-m}\rho_0^{-1}\int_0^{\rho_0} \rho^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(4\rho)\, d\rho \\
&= \ \frac{1}{2}\rho_0^{-1}\int_0^{4\rho_0} t^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(t)\, dt \\
&\leq \ \frac{1}{2}\rho_0^{-1}\left[\int_0^{\rho_0} t^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(t)\, dt + \int_{\rho_0}^{+\infty} t^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(t)\, dt\right] \\
&\leq \ \frac{1}{2}\rho_0^{-1}\left[\int_0^{\rho_0} t^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(t)\, dt + \int_M \varphi\, d\sigma \int_{\rho_0}^{+\infty} t^{-m}\, dt\right] \\
&\leq \ \frac{1}{2}\rho_0^{-1}\left[\rho_0 \sup_{t\in(0,\rho_0)} t^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(t) + \frac{1}{m-1}\rho_0^{1-m}\int_M \varphi\, d\sigma\right].
\end{aligned}$$

Segue de (2.13),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sup_{t\in(0,\rho_0)} t^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(t) \ &\leq \ \rho_0^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(\rho_0) + \frac{1}{2(m-1)}\rho_0^{-m}\int_M \varphi\, d\sigma \\
&\leq \ \rho_0^{-m}\left(1 + \frac{1}{2(1-m)}\right)\int_M \varphi\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Substituindo ρ_0,

$$\sup_{t\in(0,\rho_0)} t^{-m}\overline{\varphi}_{x_0}(t) \leq 2^{1-m}\omega_m\left(1 + \frac{1}{2(m-1)}\right) < \omega_m.$$

Usando o Lema 1.2.1 e a suposição $\varphi(x_0) \geq 1$, obtemos

$$\sup_{t\in(0,\rho)} \frac{1}{t^m}\int_{S_t(x_0)} \varphi\, d\sigma < \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sigma(S_\rho(x_0))}{\rho^m},$$

que é uma contradição. $\blacksquare$

Demonstração. (Teorema 2.1.1) Suponha, inicialmente, que $p = 1$ e, sem perda de generalidade, $\varphi \geq 0$. Usando um argumento de cobertura e o Lema 2.1.2, provaremos que

$$\sigma(\{x \in M : \varphi(x) \geq 1\}) \leq 4^m \left(\omega_m^{-1} \int_M \varphi \, d\sigma\right)^{1/m} . \int_M (|\nabla \varphi| + |H|\varphi) \, d\sigma. \tag{2.14}$$

Suponha que $A = \{x \in M : \varphi(x) \geq 1\} \neq \emptyset$. Para cada $x \in A$, sejam $\overline{\varphi}_x(\rho)$ e $\overline{\psi}_x(\rho)$, como no Lema 2.1.2, e $J = \left(\omega_m^{-1} \int_M \varphi \, d\sigma\right)^{1/m}$.

Sejam $\rho_i = 4.2^{-i} J, i = 1, 2, ...$ e

$$A_i = \left\{x \in A : \overline{\varphi}_x(4\rho) \leq 4^m J \overline{\psi}_x(\rho), \text{para algum } \rho \in \left(\frac{1}{2}\rho_i, \rho_i\right]\right\}.$$

Segue do Lema 2.1.2 que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Defina indutivamente a sequência $\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1, ...$ de subconjuntos de A como a seguir:

i) $\mathscr{F}_0 = \emptyset$

ii) Seja $k \geq 1$ e suponha que $\mathscr{F}_0, ..., \mathscr{F}_{k-1}$ estão bem definidos. Seja

$$B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{x \in \mathscr{F}_i} S_{2\rho_i}(x).$$

Se $B_k = \emptyset$, então $\mathscr{F}_k = \emptyset$. Se $B_k \neq \emptyset$, então escolha $\mathscr{F}_k$ um subconjunto finito de B_k tal que $B_k \subset \bigcup_{x \in \mathscr{F}_k} S_{2\rho_k}(x)$ e os conjuntos $S_{\rho_k}(x)$, com $x \in \mathscr{F}_k$, são dois a dois disjuntos.

Então, valem as seguintes propriedades:

(a) $\mathscr{F}_i \subset A_i$, para $i = 1, 2, ...$, pois $\mathscr{F}_i \subset B_i \subset A_i$;

(b) $A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{x \in \mathscr{F}_i} S_{2\rho_i}(x)$, pois se $x \in A$, então $x \in A_k$, para algum k, assim $x \in \bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{x \in \mathscr{F}_i} S_{2\rho_i}(x)$ ou $x \in B_k \subset \bigcup_{x \in \mathscr{F}_k} S_{2\rho_k}(x)$; e

(c) os conjuntos da coleção enumerável $S_{\rho_i}(x), x \in \mathscr{F}_i, i = 1, 2, ...$, são disjuntos.

Por (a), temos, para cada $x \in \mathscr{F}_i$,

$$\overline{\varphi}_x(4\rho) \leq 4^m J \overline{\psi}_x(\rho), \tag{2.15}$$

para algum $\rho \in \left(\frac{1}{2}\rho_i, \rho_i\right]$. Como $2\rho_i \leq 4\rho$ e $\rho \leq \rho_i$, temos que

$$\overline{\varphi}_x(2\rho_i) = \int_{S_{2\rho_i}(x)} \varphi \, d\sigma \leq \int_{S_{4\rho}(x)} \varphi \, d\sigma = \overline{\varphi}_x(4\rho),$$

$$\overline{\psi}_x(\rho) = \int_{S_{\rho}(x)} (|\nabla\varphi| + |H\varphi|) \, d\sigma \leq \int_{S_{\rho_i}(x)} (|\nabla\varphi| + |H\varphi|) \, d\sigma = \overline{\psi}_x(\rho_i)$$

e segue de (2.15) que

$$\overline{\varphi}_x(2\rho_i) \leq 4^m J \overline{\psi}_x(\rho_i), \text{ para cada } x \in \mathscr{F}_i. \tag{2.16}$$

Somando sobre todo $x \in \mathscr{F}_i, i = 1, 2, ...$, usando as propriedades (b) e (c) e (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} \sigma(M_1) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(S_{2\rho_i}(x)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{S_{2\rho_i}(x)} \varphi \, d\sigma & (2.17)\\ &\leq 4^m J \sum_{i=1}^{\infty} \int_{S_{\rho_i}(x)} (|\nabla\varphi| + |H\varphi|) \, d\sigma & (2.18)\\ &\leq 4^m J \int_M (|\nabla\varphi| + |H\varphi|) \, d\sigma, & (2.19)\end{aligned}$$

onde $M_1 = \{x \in M : \varphi(x) \geq 1\}$, o que demonstra (2.14).

Agora, sejam $\alpha, \varepsilon > 0$ constantes arbitrárias e $\lambda \in C^1(\mathbb{R})$ uma função não-decrescente tal que $\lambda(t) = 0$ para $t \leq -\varepsilon$ e $\lambda(t) = 1$ para $t \geq 0$. Tomando $\lambda(\varphi - \alpha)$ no lugar de φ, temos que $\lambda(\varphi - \alpha) = 1$ (ou ≥ 1) quando $\varphi - \alpha \geq 0$, isto é, $\varphi(x) \geq \alpha$, ou seja, $x \in M_\alpha = \{x \in M : \varphi(x) \geq \alpha\}$. Substituindo em (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} \sigma(M_\alpha) &\leq 4^m \left[\omega_m^{-1} \int_M \lambda(\varphi - \alpha) \, d\sigma\right]^{1/m} . \int_M [|\nabla(\lambda(\varphi - \alpha))| + |H|\lambda(\varphi - \alpha)] \, d\sigma & (2.20)\\ &= 4^m \omega_m^{-1/m} \left[\int_M \lambda(\varphi - \alpha) \, d\sigma\right]^{1/m} \int_M [\lambda^{'}(\varphi - \alpha)|\nabla\varphi| + |H|\lambda(\varphi - \alpha)] \, d\sigma. & (2.21)\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados de (2.21) por $\alpha^{1/(m-1)}$, usando que $0 \leq \lambda(t) \leq 1, \forall\, t$, e que $\lambda(\varphi - \alpha) = 0$ para $\varphi - \alpha \leq -\varepsilon$ $(\alpha \geq \varphi + \varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha^{1/(m-1)}\sigma(M_\alpha) &\leq 4^m\alpha^{1/(m-1)}\omega_m^{-1/m}\left[\int_M \lambda(\varphi-\alpha)\,d\sigma\right]^{1/m}\times\\
&\quad\times\int_M[\lambda^{'}(\varphi-\alpha)|\nabla\varphi|+|H|\lambda(\varphi-\alpha)]\,d\sigma.\\
&= 4^m\alpha^{1/(m-1)}\omega_m^{-1/m}\left[\int_{M_{\alpha-\varepsilon}} \lambda(\varphi-\alpha)\,d\sigma\right]^{1/m}\times\\
&\quad\times\int_M[\lambda^{'}(\varphi-\alpha)|\nabla\varphi|+|H|\lambda(\varphi-\alpha)]\,d\sigma.\\
&\leq 4^m\omega_m^{-1/m}\left[\int_{M_{\alpha-\varepsilon}} \alpha^{m/(m-1)}\,d\sigma\right]^{1/m}\times\\
&\quad\times\int_M[\lambda^{'}(\varphi-\alpha)|\nabla\varphi|+|H|\lambda(\varphi-\alpha)]\,d\sigma,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\alpha^{1/(m-1)}\sigma(M_\alpha)\leq 4^m\omega_m^{-1/m}\left[\int_M(\varphi+\varepsilon)^{m/(m-1)}\,d\sigma\right]^{1/m}\int_M[\lambda^{'}(\varphi-\alpha)|\nabla\varphi|+|H|\lambda(\varphi-\alpha)]\,d\sigma.$$

Integrando a desigualdade em $(0,+\infty)$ com relação a α e usando que

$$\int_0^{+\infty}\lambda^{'}(\varphi-\alpha)\,d\alpha=-\lambda(\varphi-\alpha)\Big|_0^{+\infty}=\lambda(\varphi)\leq 1$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\lambda(\varphi-\alpha)\,d\alpha &= \alpha\lambda(\varphi-\alpha)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\alpha\lambda^{'}(\varphi-\alpha)\,d\alpha=\int_0^{+\infty}\alpha\lambda^{'}(\varphi-\alpha)\,d\alpha\\
&\leq (\varphi+\varepsilon)\int_0^{+\infty}\lambda^{'}(\varphi-\alpha)\,d\alpha=(\varphi+\varepsilon)(-\lambda(\varphi-\alpha))\Big|_0^{+\infty}=(\varphi+\varepsilon)\lambda(\varphi)\\
&\leq \varphi+\varepsilon,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \alpha^{1/(m-1)}\sigma(M_\alpha)\,d\alpha &\leq 4^m\omega_m^{-1/m}\left[\int_M (\varphi+\varepsilon)^{m/(m-1)}\,d\sigma\right]^{1/m}\times\\
&\quad\times\int_0^{+\infty}\int_M [\lambda'(\varphi-\alpha)|\nabla\varphi| + |H|\lambda(\varphi-\alpha)]\,d\sigma d\alpha\\
&= 4^m\omega_m^{-1/m}\left[\int_M (\varphi+\varepsilon)^{m/(m-1)}\,d\sigma\right]^{1/m}\times\\
&\quad\times\int_M\left[|\nabla\varphi|\int_0^{+\infty}\lambda'(\varphi-\alpha)d\alpha + |H|\int_0^{+\infty}\lambda(\varphi-\alpha)d\alpha\right]\,d\sigma\\
&\leq 4^m\omega_m^{-1/m}\left[\int_M (\varphi+\varepsilon)^{m/(m-1)}\,d\sigma\right]^{1/m}\int_M [|\nabla\varphi| + |H|(\varphi+\varepsilon)]\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Pela fórmula da coarea,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \alpha^{1/(m-1)}\sigma(M_\alpha)\,d\alpha &= \int_0^{+\infty}\alpha^{1/(m-1)}\int_{\{\varphi\geq\alpha\}}|\nabla\varphi|\,d\sigma\,d\alpha\\
&= \int_0^{+\infty}\int_{\{\varphi\geq\alpha\}}\alpha^{1/(m-1)}|\nabla\varphi|\,d\sigma\,d\alpha\\
&= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\{\varphi=\alpha\}}\alpha^{1/(m-1)}\,d\tau\,d\alpha\\
&= \frac{m-1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\{\varphi=\alpha\}}\alpha^{m/(m-1)}\,d\tau\\
&= \frac{m-1}{m}\int_M \varphi^{m/(m-1)}\,d\sigma,
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\frac{m-1}{m}\int_M \varphi^{m/(m-1)}\,d\sigma \leq 4^m\omega_m^{-1/m}\left[\int_M \varphi^{m/(m-1)}\,d\sigma\right]^{1/m}\int_M [|\nabla\varphi| + |H|\varphi]\,d\sigma.$$

Daí,

$$\left(\int_M \varphi^{m/(m-1)}\,d\sigma\right)^{1-\frac{1}{m}} \leq 4^m\omega_m^{-1/m}\frac{m}{m-1}\int_M [|\nabla\varphi| + |H|\varphi]\,d\sigma.$$

Logo,

$$\left(\int_M \varphi^{1^*}\,d\sigma\right)^{1/1^*} \leq C\int_M [|\nabla\varphi| + |H|\varphi]\,d\sigma.$$

Para o caso $p \in (1,m)$, tome $\psi = \varphi^\alpha$, vale que

$$\left(\int_M |\varphi^\alpha|^{1^*} d\sigma\right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C\int_M (|\nabla(\varphi^\alpha)| + |H\varphi^\alpha|)d\sigma.$$

Temos que $\nabla(\varphi^\alpha) = \alpha\varphi^{\alpha-1}\nabla\varphi$. Assim,

$$\left(\int_M |\varphi^\alpha|^{1^*} d\sigma\right)^{\frac{1}{1^*}} \le C\alpha \int_M |\nabla\varphi||\varphi^{\alpha-1}|\, d\sigma + C\int_M |H\varphi||\varphi^{\alpha-1}| d\sigma.$$

Tome $\alpha = p^*/1^*$, com $p \in (1, m)$, então $\alpha = \frac{pm-p}{m-p} > 1$. Usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \left(\int_M |\varphi^\alpha|^{1^*} d\sigma\right)^{1/1^*} &\le C\alpha \left(\int_M |\nabla\varphi||\varphi^{\alpha-1}|\, d\sigma + \int_M |H\varphi||\varphi^{\alpha-1}| d\sigma\right) \\ &\le C\alpha \left(\int_M |\nabla\varphi|^p\, d\sigma\right)^{1/p} \left(\int_M |\varphi|^{(\alpha-1)q}\right)^{1/q} + \\ &\quad + C\alpha \left(\int_M |H\varphi|^p\, d\sigma\right)^{1/p} \left(\int_M |\varphi|^{(\alpha-1)q}\right)^{1/q} \\ &= C\alpha \left(\int_M |\varphi|^{(\alpha-1)q}\right)^{1/q} \left[\left(\int_M |\nabla\varphi|^p\, d\sigma\right)^{1/p} + \left(\int_M |H\varphi|^p\, d\sigma\right)^{1/p}\right], \end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Observe que

$$\frac{1}{1^*} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

e

$$(\alpha - 1)q = \left(\frac{p^*}{1^*} - 1\right) q = p^* \left(\frac{1}{1^*} - \frac{1}{p^*}\right) q = p^*.$$

Daí,

$$\left(\int_M |\varphi|^{p^*} d\sigma\right)^{\frac{1}{1^*}} \le C\alpha \left(\int_M |\varphi|^{p^*}\right)^{1/q} \left[\left(\int_M |\nabla\varphi|^p\, d\sigma\right)^{1/p} + \left(\int_M |H\varphi|^p\, d\sigma\right)^{1/p}\right],$$

o que implica

$$\left(\int_M |\varphi|^{p^*} d\sigma\right)^{\frac{1}{1^*} - \frac{1}{q}} \le C\alpha \left[\left(\int_M |\nabla\varphi|^p\, d\sigma\right)^{1/p} + \left(\int_M |H\varphi|^p\, d\sigma\right)^{1/p}\right].$$

Portanto,

$$\left(\int_M |\varphi|^{p^*} d\sigma\right)^{1/p^*} \le C(m, p) \left[\left(\int_M |\nabla\varphi|^p\, d\sigma\right)^{1/p} + \left(\int_M |H\varphi|^p\, d\sigma\right)^{1/p}\right],$$

como queríamos demonstrar. ∎

2.2 Uma Desigualdade do Valor Médio para Funções Subharmônicas

Para cada função $h \in C^2(U)$, Δh é definido por

$$\Delta h(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}^{ij}(x) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^{n} H_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) \tag{2.22}$$

para $x \in M$.

Definição 2.2.1 *Uma função real χ em M é chamada fracamente subharmônica se é σ-integrável em M e*

$$\int_M \chi(x) \Delta h(x) d\sigma(x) \geq 0 \tag{2.23}$$

pra cada função não-negativa $h \in C_0^2(U)$.

Observação 2.2.1 *Toda função subharmônica é fracamente subharmônica. De fato, sejam $u \in C^2$ uma função subharmônica, isto é, $\Delta u \geq 0$, e $h \in C_0^2(U)$ uma função não-negativa. Temos*

$$\begin{aligned} \int_M h\Delta u \, d\sigma &= \int_M div(h\nabla u) d\sigma - \int_M \langle \nabla h, \nabla u \rangle d\sigma \\ &= \int_{\partial M} \langle h\nabla u, \nu \rangle d\sigma - \int_M \langle \nabla h, \nabla u \rangle d\sigma \\ &= -\int_M \langle \nabla h, \nabla u \rangle d\sigma, \end{aligned}$$

da mesma forma

$$\begin{aligned} \int_M u\Delta h \, d\sigma &= \int_M div(u\nabla h) d\sigma - \int_M \langle \nabla u, \nabla h \rangle d\sigma \\ &= -\int_M \langle \nabla u, \nabla h \rangle d\sigma, \end{aligned}$$

logo,

$$\int_M u\Delta h \, d\sigma = \int_M h\Delta u \, d\sigma \geq 0,$$

isto é, u é subharmônica.

O lema seguinte será usado na demonstração do resultado principal desta seção.

Lema 2.2.1 *Sejam $\lambda \in C^2(\mathbb{R})$ uma função não-decrescente tal que $\lambda(t) = 0$ quando $t \leq 0$, e χ uma função não-negativa fracamente subharmônica em M. Para cada $x_0 \in M$, definimos $\varphi_{x_0}, \psi_{x_0}$ por*

$$\varphi_{x_0}(\rho) = \int_M \chi(x)\lambda(\rho - r)\, d\sigma(x)$$

e

$$\psi_{x_0}(\rho) = \int_M \chi(x)|H(x)|\lambda(\rho - r)\, d\sigma(x),$$

onde $r = |x - x_0|$. Então,

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\varphi_{x_0(\rho)}}{\rho^m}\right) \leq \rho^{-m-1}\int_0^\rho t\psi'_{x_0}(t)\, dt$$

para cada $\rho \in (0, d)$, onde $d = dist(x_0, \partial U)$.

Demonstração. Seja γ definida em $\mathbb{R}$ por

$$\gamma(s) = \int_s^\infty t\lambda(\rho - t)\, dt.$$

Como $\gamma^{'}(r) = r\lambda(\rho - r)$ e $\gamma^{''}(r) = \lambda(\rho - r) + r\lambda^{'}(\rho - r)$, segue que $\gamma(r)$, onde $r = |x - x_0|$, é $C^2(U)$. Quando $s \geq \rho$, temos $\gamma(s) = 0$, isto é, se $\rho < d$, então γ tem suporte compacto em U. Assim, quando $\rho < d$, podemos calcular $\Delta\gamma(r)$ usando (2.22). Temos

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma(r)) = \gamma^{'}(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} = -r\lambda(\rho - r)\frac{(x - x_0)_j}{r} = -\lambda(\rho - r)(x - x_0)_j$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2(\gamma(r))}{\partial x_i x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma(r))\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda(\rho - r)(x - x_0)_j) \\
&= -\left((x - x_0)_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda(\rho - r)) + \lambda(\rho - r) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(x - x_0)_j\right) \\
&= -\left(-(x - x_0)_j \cdot \lambda^{'}(\rho - r)\frac{\partial r}{\partial x_i} + \lambda(\rho - r)\delta_{ij}\right) \\
&= \lambda^{'}(\rho - r)(x - x_0)_j \cdot \frac{(x - x_0)_i}{r} - \lambda(\rho - r)\delta_{ij},
\end{aligned}$$

logo,

$$
\begin{aligned}
\Delta(\gamma(r)) &= \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}^{ij} \left(\lambda^{'}(\rho - r)(x - x_0)_j \cdot \frac{(x - x_0)_i}{r} - \lambda(\rho - r)\delta_{ij} \right) - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} H_j \lambda(\rho - r)(x - x_0)_j \\
&= r\lambda^{'}(\rho - r) \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}^{ij} \frac{(x - x_0)_i}{r} \frac{(x - x_0)_j}{r} - \lambda(\rho - r) \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}^{ii} - \\
&\quad -\lambda(\rho - r) \sum_{j=1}^{n} (x - x_0)_j H_j.
\end{aligned}
$$

Usando a Proposição 1.1.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta(\gamma(r)) &\leq r\lambda^{'}(\rho - r) - m\lambda(\rho - r) + \lambda(\rho - r)\langle -H, x - x_0 \rangle \\
&\leq r\lambda^{'}(\rho - r) - m\lambda(\rho - r) + \lambda(\rho - r)|H|r.
\end{aligned}
$$

Por (2.23),

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_M \chi \, \Delta(\gamma(r)) d\sigma \\
&\leq \int_M \chi \left(r\lambda^{'}(\rho - r) - m\lambda(\rho - r) + \lambda(\rho - r)|H|r \right) d\sigma,
\end{aligned}
$$

o que nos dá

$$
m \int_M \chi \, \lambda(\rho - r) \, d\sigma - \int_M \chi \, r\lambda^{'}(\rho - r) \, d\sigma \quad \leq \quad \int_M \chi \, |H| r \lambda(\rho - r) \, d\sigma,
$$

isto é,

$$
m\varphi_{x_0}(\rho) - \int_M \chi \, r\lambda^{'}(\rho - r) \, d\sigma \quad \leq \quad \int_M \chi \, |H| r \lambda(\rho - r) \, d\sigma. \tag{2.24}
$$

Observe que derivando λ (com relação a ρ), temos que $\lambda^{'}(\rho - r) \geq 0$ (pois λ é não decrescente). Assim, para $r < \rho$, temos

$$
r\lambda^{'}(\rho - r) \leq \rho\lambda^{'}(\rho - r), \tag{2.25}
$$

para $r \geq \rho$, (2.25) segue trivialmente.

Com isso,

$$\begin{aligned}\int_M \chi\, r\lambda^{'}(\rho-r)\,d\sigma &\leq \rho\int_M \chi\,\lambda^{'}(\rho-r)\,d\sigma\\ &= \rho\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\int_M \chi\lambda(\rho-r)\,d\sigma\right)\\ &= \rho\varphi^{'}_{x_0}(\rho)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_M \chi\,|H|r\lambda(\rho-r)\,d\sigma &= \int_M \chi\,|H|\int_0^\rho r\lambda^{'}(t-r)\,dt\,d\sigma\\ &\leq \int_M \chi\,|H|\int_0^\rho t\lambda^{'}(t-r)\,dt\,d\sigma\\ &= \int_0^\rho t\int_M \chi\,|H|\lambda^{'}(t-r)\,d\sigma\,dt\\ &= \int_0^\rho t\psi^{'}_{x_0}(t).\end{aligned}$$

Consequentemente, (2.24) nos dá

$$m\varphi_{x_0}(\rho)-\rho\varphi^{'}_{x_0}(\rho)\leq\int_0^\rho t\psi^{'}_{x_0}(t)\,dt,$$

e obtemos

$$\begin{aligned}-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}\right) &= -\left(\frac{\rho^m\varphi^{'}_{x_0}(\rho)-\varphi_{x_0}(\rho)m\rho^{m-1}}{\rho^{2m}}\right)\\ &= \frac{\rho^{m-1}(m\varphi_{x_0}(\rho)-\rho\varphi^{'}_{x_0}(\rho))}{\rho^{2m}}\\ &\leq \rho^{-m-1}\int_0^\rho t\psi^{'}_{x_0}(t)\,dt.\end{aligned}$$

■

Corolário 2.2.1 *Se as hipóteses do Lema 2.2.1 são satisfeitas, então*

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}\right)\leq\frac{\psi_{x_0}(\rho)}{\rho^m},$$

para cada $\rho\in(0,d)$.

De fato,

$$\int_0^\rho t\psi'_{x_0}(t)\,dt \leq \rho \int_0^\rho \psi'_{x_0}(t)\,dt = \rho\psi_{x_0}(\rho),$$

daí,

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\varphi_{x_0(\rho)}}{\rho^m}\right) \leq \rho^{-m-1}\int_0^\rho t\psi'_{x_0}(t)\,dt \leq \rho^{-m}\psi_{x_0}(\rho).$$

Observe que se existe uma constante Λ tal que $|H| \leq \Lambda$ em M, então $\psi_{x_0}(\rho) \leq \Lambda\varphi_{x_0}(\rho)$ e, segue do Corolário 2.2.1, que

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}\right) \leq \Lambda\frac{\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}.$$

Integrando no intervalo $[t,\rho]$, onde $t \in (0,\rho)$, obtemos

$$-\log\left(\frac{\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}\right) + \log\left(\frac{\varphi_{x_0}(t)}{t^m}\right) \leq \Lambda\rho - \Lambda t \leq \Lambda\rho,$$

como a exponencial é crescente,

$$\left(\frac{\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}\right)^{-1}\cdot\frac{\varphi_{x_0}(t)}{t^m} \leq e^{\Lambda\rho},$$

isto é,

$$\frac{\varphi_{x_0}(t)}{t^m} \leq e^{\Lambda\rho}\cdot\frac{\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m},$$

daí,

$$\sup_{t\in(0,\rho)}\frac{\varphi_{x_0}(t)}{t^m} \leq e^{\Lambda\rho}\cdot\frac{\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m},$$

para todo $\rho \in (0,d)$. Escolhendo λ tal que $\lambda(t) = 1$, quando $t \geq \varepsilon$, e fazendo $\varepsilon \to 0^+$, segue que

$$\chi(x_0) \leq e^{\Lambda\rho}\omega_m^{-1}\rho_0^{-m}\int_{S_{\rho_0}(x_0)}\chi\,d\sigma,$$

pela expansão da série de Taylor,

$$\chi(x_0) \leq \left[1 + \frac{\Lambda\rho}{1!} + \frac{(\Lambda\rho)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\Lambda\rho)^m}{m!} + \ldots\right]\omega_m^{-1}\rho^{-m}\int_{S_\rho(x_0)}\chi(x)\,d\sigma(x).$$

O teorema a seguir mostra que esse resultado pode ser melhorado.

Teorema 2.2.1 *Seja χ uma função não-negativa fracamente subharmônica em M e suponha que existe uma constante Λ tal que $|H(x)| \leq \Lambda$, $\forall\, x \in M$. Para cada $x_0 \in M$, seja $d(x_0) =$*

$d(x_0, \partial U)$. Então, para quase todo $x_0 \in M$ e todo $\rho \in (0, d(x_0))$, temos

$$\chi(x_0) \leq \left[1 + \frac{\Lambda\rho}{1!} + \frac{(\Lambda\rho)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\Lambda\rho)^m}{m!}\right] \omega_m^{-1} \rho^{-m} \int_{S_\rho(x_0)} \chi(x)\, d\sigma(x).$$

Demonstração. Sejam φ_{x_0}, ψ_{x_0} como no Lema 2.2.1. Desde que $|H(x)| \leq \Lambda$, temos $\psi'_{x_0}(\rho) \leq \Lambda\varphi'_{x_0}(\rho)$ e, pelo Lema 2.2.1,

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}\right) \leq \Lambda\rho^{-m-1} \int_0^\rho t\varphi'_{x_0}(t)\, dt, \tag{2.26}$$

para cada $\rho \in (0, d(x_0))$. Sejam $\rho_0 \in (0, d(x_0))$ e, para $0 \leq s \leq m$,

$$T_s = \int_0^{\rho_0} \left[\int_0^\rho t\varphi'_{x_0}(t)\, dt\right] \rho^{-s-1}\, d\rho.$$

Integrando (2.26) no intervalo (t, ρ_0), com $0 < t < \rho_0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{x_0}(t)}{t^m} - \frac{\varphi_{x_0}(\rho_0)}{\rho_0^m} &\leq \Lambda \int_t^{\rho_0} \left[\int_0^\rho t\varphi'_{x_0}(t)\, dt\right] \rho^{-m-1}\, d\rho \\ &\leq \Lambda \int_0^{\rho_0} \left[\int_0^\rho t\varphi'_{x_0}(t)\, dt\right] \rho^{-m-1}\, d\rho = \Lambda T_m, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\varphi_{x_0}(t)}{t^m} \leq \frac{\varphi_{x_0}(\rho_0)}{\rho_0^m} + \Lambda T_m. \tag{2.27}$$

Usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned} T_s &= \int_0^{\rho_0} \rho^{-s-1} \int_0^\rho t\varphi'_{x_0}(t)\, dt\, d\rho & (2.28) \\ &= -s^{-1}\rho^{-s} \int_0^\rho t\varphi'_{x_0}(t)\, dt \Big|_0^{\rho_0} - \int_0^{\rho_0} (-s^{-1}\rho^{-s}.\rho\varphi'_{x_0}(\rho))\, d\rho & (2.29) \\ &= -s^{-1}\rho_0^{-s} \int_0^{\rho_0} t\varphi'_{x_0}(t)\, dt + s^{-1} \int_0^{\rho_0} \rho^{1-s}\varphi'_{x_0}(\rho)\, d\rho & (2.30) \\ &\leq s^{-1} \int_0^{\rho_0} \rho^{1-s}\varphi'_{x_0}(\rho)\, d\rho & (2.31) \\ &= s^{-1}\left[\rho^{1-s}\varphi_{x_0}(\rho)\Big|_0^{\rho_0} - \int_0^{\rho_0} (1-s)\rho^{-s}\varphi_{x_0}(\rho)\, d\rho\right] & (2.32) \\ &= s^{-1}\rho_0^{1-s}\varphi_{x_0}(\rho_0) + s^{-1}(s-1) \int_0^{\rho_0} \rho^{-s}\varphi_{x_0}(\rho)\, d\rho. & (2.33) \end{aligned}$$

Agora, podemos escrever

$$\int_0^{\rho_0} \rho^{-s}\varphi_{x_0}(\rho)\,d\rho = \int_0^{\rho_0} \rho^{m-s}(\rho^{-m,}\varphi_{x_0}(\rho))\,d\rho$$

daí, usando integração por partes e a equação (2.26), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\rho_0} \rho^{-s}\varphi_{x_0}(\rho)\,d\rho &= \int_0^{\rho_0} \rho^{m-s}(\rho^{-m,}\varphi_{x_0}(\rho))\,d\rho \\
&= \frac{\rho^{m-s+1}}{m-s+1}.\rho^{-m}\varphi_{x_0}(\rho) - \int_0^{\rho_0} \frac{\rho^{m-s+1}}{m-s+1}\left(\frac{\varphi_{x_0}(\rho)}{\rho^m}\right)' d\rho \\
&\leq (m-s+1)^{-1}\left[\rho^{1-s}\varphi_{x_0}(\rho)\Big|_0^{\rho_0} + \int_0^{\rho_0} \rho^{-s}\Lambda \int_0^{\rho} t\varphi_{x_0}^{'}(t)\,dtd\rho\right] \\
&= (m-s+1)^{-1}\left[\rho_0^{1-s}\varphi_{x_0}(\rho_0) + \Lambda\int_0^{\rho_0}\left[\int_0^{\rho} t\varphi_{x_0}^{'}(t)\,dt\right]\rho^{-s}\,d\rho\right] \\
&= (m-s+1)^{-1}[\rho_0^{1-s}\varphi_{x_0}(\rho_0) + \Lambda T_{s-1}].
\end{aligned}$$

Substituindo em (2.33), teremos

$$\begin{aligned}
T_s &\leq s^{-1}\rho_0^{1-s}\varphi_{x_0}(\rho_0) + s^{-1}(s-1)(m-s+1)^{-1}[\rho_0^{1-s}\varphi_{x_0}(\rho_0) + \Lambda T_{s-1}] && (2.34)\\
&= s^{-1}\rho_0^{1-s}\varphi_{x_0}(\rho_0)\left(1 + \frac{s-1}{m-s+1}\right) + \frac{s-1}{s(m-s+1)}\cdot\Lambda T_{s-1} && (2.35)\\
&= \frac{m}{s(m-s+1)}\rho_0^{1-s}\varphi_{x_0}(\rho_0) + \frac{s-1}{s(m-s+1)}\cdot\Lambda T_{s-1} && (2.36)
\end{aligned}$$

para $1 \leq s \leq m$. Combinando (2.36), para $s = 1, 2, ..., m$, com (2.27), obtemos

$$\frac{\varphi_{x_0}(t)}{t^m} \leq \left[1 + \frac{\Lambda\rho_0}{1!} + \frac{(\Lambda\rho_0)}{2!} + ... + \frac{(\Lambda\rho_0)^m}{m!}\right]\frac{\varphi_{x_0}(\rho_0)}{\rho_0^m}. \tag{2.37}$$

Agora, seja $\varepsilon \in (0, t)$ e escolha λ tal que $\lambda(t) = 1$ quando $t \geq 0$. A equação (2.37), usando (2.9) e (2.12), com χ no lugar de φ, nos dá

$$t^{-m}\int_{S_{t-\varepsilon}(x_0)} \chi\,d\sigma \leq \left[1 + \frac{\Lambda\rho_0}{1!} + ... + \frac{(\Lambda\rho_0)^m}{m!}\right]\rho_0^{-m}\int_{S_{\rho_0}(x_0)} \chi\,d\sigma.$$

Como $t \in (0, \rho_0)$ e $\varepsilon \in (0, t)$, segue que

$$\sup_{t\in(0,\rho_0)} t^{-m}\int_{S_t(x_0)} \chi\,d\sigma \leq \left[1 + \frac{\Lambda\rho_0}{1!} + ... + \frac{(\Lambda\rho_0)^m}{m!}\right]\rho_0^{-m}\int_{S_{\rho_0}(x_0)} \chi\,d\sigma,$$

o que implica

$$\sup_{t\in(0,\rho_0)} \max_{S_t(x_0)}\{\chi(x)\}t^{-m}\int_{S_t(x_0)} d\sigma \leq \left[1+\frac{\Lambda\rho_0}{1!}+...+\frac{(\Lambda\rho_0)^m}{m!}\right]\rho_0^{-m}\int_{S_{\rho_0}(x_0)}\chi\, d\sigma,$$

ou ainda

$$\lim_{t\to 0} \max_{S_t(x_0)}\{\chi(x)\}t^{-m}\int_{S_t(x_0)} d\sigma \leq \left[1+\frac{\Lambda\rho_0}{1!}+...+\frac{(\Lambda\rho_0)^m}{m!}\right]\rho_0^{-m}\int_{S_{\rho_0}(x_0)}\chi\, d\sigma.$$

Assim, pelo Lema 1.2.1,

$$\chi(x_0)\omega_m \leq \left[1+\frac{\Lambda\rho_0}{1!}+...+\frac{(\Lambda\rho_0)^m}{m!}\right]\rho_0^{-m}\int_{S_{\rho_0}(x_0)}\chi\, d\sigma,$$

isto é,

$$\chi(x_0) \leq \left[1+\frac{\Lambda\rho_0}{1!}+...+\frac{(\Lambda\rho_0)^m}{m!}\right]\omega_m^{-1}\rho_0^{-m}\int_{S_{\rho_0}(x_0)}\chi\, d\sigma.$$

■

Pela observação 2.2.1, esse resultado também é válido para funções subharmônicas não-negativas.

Referências

1 Dupaigne, L., *Stable solutions of elliptic partial differential equations*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathemathics, Chapman e Hall, 143.

2 Evans, L. C., *Partial diferential equations*, Graduate Studies in Mathematics - vol 19, Departament of Mathematics, University of California, Berkeley.

3 Hoffman, D., Spruck, J, *Sobolev and Isoperimetric Inequalities for Riemannian Submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math., vol. XXVII (1974) 715-727.

4 Medeiros, A.A., *The weighted Sobolev and meam value inequalities*, American Mathematical Society, vol. 143, number 3, 2015, 1229-1239.

5 Michael, J.H., Simon, L.M., *Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of* $\mathbb{R}^n$, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973) 361-379.

6 Miranda, M., *Disuguaglianze di Sobolev sulle ipersuperfici minimali*, Rend. Sem. Mat. Univ.Padova, 38, 1967.

7 Simon, L. M., *Interior gradient bounds for non-uniformly elliptic partial differential equations of divergence form - Thesis*, University of Adelaide, 1971.